المحاضرة الرابعة عشرة

3.5: الاختبارات اللاوسيطية:

إن ما رأينا في الفقرات السابقة هو دراسة مجموعة من الاختبارات تتعلق بوسطاء مجتمعات إحصائية ذات نماذج توزيع معلومة، إلا أنه في الحالة التي تكون فيها نماذج التوزيعات للمجتمعات موضع الدراسة غير محددة فإن الطرق التي ذكرناها ستقود إلى نتائج خاطئة ، وفي هذه الحالة فالطرق العملية للاختبار هي الاختبارات اللاوسيطية حيث تشمل الدراسة والتحليل جميع عناصر العينة وتوزيعها ، وليس وسطاء العينة فقط.

1.3.5 : اختبار الملاءَمة (التطابق) – التصنيف الأحادي:

لنفترض أننا نقوم بدراسة صفة في مجتمع (متغير) ، وأن هذه الصفة تبدو في K من الأشكال. فإذا كانت لدينا عينة عشوائية تتضمن n عنصراً (ملاحظة) فإن كل ملاحظة من هذه العينة ستأخذ شكلاً واحداً فقط من الأشكال الـ K المذكورة فإذا أحصينا التواترات (التكرارات) الملحوظة الموافقة لكل شكل ولتكن:

$$O_1, O_2 , \dots , O_K \qquad ; \qquad \sum_{i=1}^{K} O_i = n$$

وبفرض أن هذه التواترات المفروضة أو المتوقعة نظرياً لهذه الأشكال هي:

$$E_1, E_2 , \dots , E_K \qquad ; \qquad \sum_{i=1}^{K} E_i = n$$

عندئذٍ الفرضية الأساسية (فرضية العدم) المراد اختبارها هي H_0 :

[انزياح التواترات الملحوظة عن التواترات المتوقعة (النظرية) ليس مهمّاً]

أي هناك ملاءَمة أو مطابقة بين التواترات النظرية والتواترات الملحوظة (المشاهدة).

والفرضية البديلة H_1 :

[ليس هناك ملاءَمة أو مطابقة بين التواترات الملحوظة والتواترات المتوقعة] .

وإحصاء الاختبار (إحصاء الملاءَمة) الذي يستخدم من أجل فرضية من هذا النوع هو:

$$x_0{}^2 = \sum_{i=1}^{K} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$$

ولهذا الإحصاء تقريباً التوزيع كاي_مربع بـ $\gamma = K - 1$ درجة من الحرية، فعندما تكون التكرارات الملحوظة قريبة من التكرارات المتوقعة أو النظرية الموافقة لها فإن قيمة $\varkappa_0^2$ تصبح صغيرة ، وهذا يشير إلى ملاءَمة جيدة ، وعلى العكس فعندما يكون هناك اختلاف واضح بين التواترات الملحوظة والتواترات المتوقعة فإن قيمة $\varkappa_0^2$ تصبح كبيرة، وهذا يشير إلى ملاءَمة ضعيفة أو عدم تطابق. والملاءَمة الجيدة تقودنا لقبول الفرضية H_0 والملاءَمة الضعيفة تقودنا لرفض H_0. والمنطقة الحرجة تقع في الذيل الأيمن من توزيع كاي_مربع. فمن أجل مستوى الأهمية (المعنوية) α ومن جدول توزيع $\varkappa^2$ تعين القيمة النظرية لإحصائية الاختبار (القيمة الحرجة) $\varkappa_{1-\alpha}^2(\gamma)$ وعندئذٍ إذا كانت:

$\varkappa_0^2 \leq \varkappa_{1-\alpha}^2(\gamma)$ نقبل H_0 ونرفض H_1 أي هناك ملاءَمة (تطابق).

وإذا كان $\varkappa_0^2 > \varkappa_{1-\alpha}^2(\gamma)$ نرفض H_0 ونقبل H_1 أي ليس هناك ملاءَمة (تطابق).

مثال (5- 14):

في مركز صحي، يراجع المركز عددٌ كبيرٌ من المرضى يومياً. ويحوي المركز 5 عيادات رئيسية (أطفال – عصبية – نسائية – عينية – داخلية)، ويعتقد أن المرضى يتوزعون بالتساوي على العيادات. ولاختبار ذلك تم دراسة عينة عشوائية من 200 مريض راجعوا المركز وكانت المشاهدات كالآتي:

العيادات	أطفال	عصبية	نسائية	عينية	داخلية
O_i التكرار المشاهد(التواتر المشاهد)	30	35	50	30	55

والمطلوب: عند مستوى الأهمية $\alpha = 0.05$ هل نؤيد اعتقاد المركز بأن المرضى يتوزعون بحصص متساوية على العيادات يومياً.

الحل:

إذا كان توزيع المرضى بالتساوي على العيادات فهذا يعني أن النسب بين المرضى متساوية بتوزعها على العيادات.

$$P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = P_5 = \frac{1}{5}$$

ويراد اختبار H_0: هناك ملاءَمة ما بين التكرارات المشاهدة والتكرارات المتوقعة].

مقابل الفرضية البديلة:[التكرارات المشاهدة لا تطابق (تلائم) التكرارات المتوقعة]

وعند مستوى المعنوية $\alpha = 0.05$ والتكرارات المتوقعة

$$E_i = nP_i = (200)\left(\frac{1}{5}\right) = 40 \qquad \forall\, i = 1, 2, 3, 4, 5$$

ومِنْ ثَمّ لدينا:

العيادات	أطفال	عصبية	نسائية	عينية	داخلية	المجموع
O_i	30	35	50	30	55	$n = 200$
E_i	40	40	40	40	40	$n = 200$
$(O_i - E_i)$	-10	-5	10	-10	15	0
$(O_i - E_i)^2$	100	25	100	100	225	0
$\frac{(O_i-E_i)^2}{E_i}$	2.5	0.625	2.5	2.5	5.625	13.75

ومنه ستكون قيمة إحصائية الاختبار تحت صحة H_0 بالشكل الآتي:

$$\varkappa_0^2 = \sum_{i=1}^{K} \frac{(O_i-E_i)^2}{E_i} = 13.75$$

والقيمة النظرية لإحصائية الاختبار عند مستوى المعنوية $\alpha = 0.05$ والاختبار من اليمين والتوزيع كاي_مربع بـ $\gamma = K - 1 = 5 - 1 = 4$ درجة من الحرية ستكون $x_{1-\alpha}{}^2(\gamma) = x_{0.95}{}^2(4) = 9.49$

بالمقارنة ما بين $\varkappa_0^2 = 13.75$ و $\varkappa_{1-\alpha}^2(\gamma) = 9.49$ نجد أن:

$\varkappa_0^2 > x_{1-\alpha}{}^2(\gamma)$ ومنه نرفض H_0 ونقبل H_1 أي هناك عدم مطابقة ما بين التكرارات المشاهدة والتكرارات المتوقعة ، ومِنْ ثَمّ اعتقاد المركز غير صحيح بتوزع المرضى على عيادات المركز الصحي بالتساوي.

مثال (5 - 15):

يمثل البيان الآتي عدد الحوادث الأسبوعية التي وقعت على إحدى الطرق خلال 100 أسبوع متتالية:

عدد الحوادث الأسبوعية	0	1	2	3	4 فأكثر
عدد الأسابيع	45	35	12	5	3

هل يمكن القول: إن عدد الحوادث الأسبوعية يتبع توزيع بواسون بمتوسط حادث واحد كل أسبوع، وذلك عند مستوى المعنوية $\alpha = 0.05$ ؟

الحل: لدينا الفرضية الأساسية (فرضية العدم):

H_0 :[عدد الحوادث الأسبوعية يتبع توزيع بواسون بمتوسط حادثة واحدة أسبوعياً]

H_1:[عدد الحوادث الأسبوعية لايتبع توزيع بواسون بمتوسط حادث واحد كل أسبوع]

$$X \sim Poisson(x) \Leftrightarrow f_X(x) = \frac{\mu^x}{x!} e^{-x} = \frac{1}{x!} e^{-1} \ ; x = 0, 1, 2, \dots$$

$$x = 0 \ \Rightarrow P_1 = \frac{1}{e} = 0.37$$

$$x = 1 \ \Rightarrow P_2 = \frac{1}{e} = 0.37$$

$$x = 2 \ \Rightarrow P_3 = \frac{1}{2e} = 0.185$$

$$x = 3 \ \Rightarrow P_4 = \frac{1}{6e} = 0.062$$

$$x \geq 4 \Rightarrow P_5 = 1 - \sum_{x=0}^{3} \frac{1}{x!.e} = 0.013$$

والتكرار المتوقع $E_i = n.P_i$ حيث $i = 0, 1, 2, \dots$ وحيث أن $n = 100$

$$E_1 = 37 \ ; \quad E_2 = 37 \ ; \quad E_3 = 18.5 \quad ; \quad E_4 = 6.2 \quad ; E_5 = 1.3$$

ومنه أصبح لدينا النتائج التالية:

x	O_i	E_i	$(O_i - E_i)$	$(O_i - E_i)^2$	$\frac{(O_i-E_i)^2}{E_i}$
0	45	37	8	64	1.73
1	35	37	-2	4	0.11
2	12	18.5	-6.5	42.25	2.28
3	5	6.2	-1.2	1.44	0.23
4 فأكثر	3	1.3	1.7	2.89	2.22

وقيمة إحصائية الاختبار تحت صحة H_0:

$$\varkappa_0^2 = \sum_{i=1}^{K} \frac{(O_i-E_i)^2}{E_i} = 6.57$$

والقيمة النظرية لإحصائية الاختبار عند مستوى المعنوية $\alpha = 0.05$ والتوزيع كاي_مربع بـ $\gamma = K - 1 = 5 - 1 = 4$ درجة من الحرية ستكون:

$$\varkappa_{1-\alpha}^2(\gamma) = \varkappa_{0.95}^2(4) = 9.49$$

بالمقارنة ما بين $\varkappa_0^2 = 6.57$ و $\varkappa_{1-\alpha}^2(\gamma) = 9.49$ نجد أن:

$\varkappa_0^2 < \varkappa_{0.95}^2(4)$ ومنه نقبل H_0 ونرفض H_1 ، أي إن عدد الحوادث الأسبوعية يتبع توزيع بواسون بمتوسط حادث واحد أسبوعياً.

مثال (5 - 16):

من علم الوراثة نأخذ مسألة تصالب نوعين من البازلياء، ووفقه أحصى ماندل بذور النباتات كما في الجدول أدناه وتقول نظرية ماندل في الوراثة إن هذه التواترات يجب أن تكون بنسبة 1 : 3 : 3 : 9 أي:

$\frac{9}{16}$ يجب أن يكون مستديراً وأصفر.

$\frac{3}{16}$ يجب أن يكون مجعداً وأصفر.

$\frac{3}{16}$ يجب أن يكون مستديراً وأخضر.

$\frac{1}{16}$ يجب أن يكون مجعداً وأخضر.

هل يمكن القول من خلال بيانات هذا الجدول إنها تتلاءم مع نظرية ماندل ، وذلك عند مستوى المعنوية $\alpha = 0.05$.

الصنف	التكرار المشاهد O_i	التكرار المتوقع E_i	$(O_i - E_i)$	$(O_i - E_i)^2$	$\frac{(O_i-E_i)^2}{E_i}$
$\frac{9}{16}$ مستدير وأصفر	315	312.75	2.25	5.06	0.02
$\frac{3}{16}$ مجعد وأصفر.	101	104.25	-3.25	10.56	0.10
$\frac{3}{16}$ مستدير وأخضر	108	104.25	3.75	14.06	0.14
$\frac{1}{16}$ مجعد وأخضر	32	34.75	-2.75	7.56	0.22
المجموع	$n = 556$	556			0.48

وستكون قيمة إحصائية الاختبار تحت صحة H_0 :[البيانات تتلاءم مع نظرية ماندل] $\varkappa_0^2 = \sum_{i=1}^{K} \frac{(O_i-E_i)^2}{E_i} = 0.48$.

وعند مستوى المعنوية $\alpha = 0.05$ ودرجة الحرية $\gamma = \mathrm{K} - 1 = 4 - 1 = 3$

ستكون القيمة النظرية لإحصائية الاختبار $\varkappa_{1-\alpha}^2(\gamma) = \varkappa_{0.95}^2(3) = 7.81$

وبالمقارنة مع $\varkappa_0^2$ نجد أن $\varkappa_0^2 < \varkappa_{0.95}^2(3)$ ومنه نقبل H_0 ونرفض H_1 ، أي إن البيانات تتلاءم مع نظرية ماندل.

2.3.5: اختبار الاستقلال _ التصنيف الثنائي:

لنفترض أننا نقوم بدراسة صفتين في المجتمع وبصورة كيفية تدعى إحدى الصفتين بالمتغير الأول ولنفترض أن هذه الصفة تبدو في r من الأشكال وسيكون متغير الصفوف، والمتغير الثاني ولنفترض أنه يبدو في c من الأشكال وسيكون متغير الأعمدة. فإذا كان لدينا عينة عشوائية حجمها n، فإننا نقوم بتصنيف عناصرها في مجموعات أو خلايا عددها $(r \times c)$ خلية بحيث تحوي الخلية (ij) عناصر

العينة التي لها الشكل i من المتغير الأول والشكل j من المتغير الثاني ثم نقوم بإحصاء عدد من عناصر كل خلية من الخلايا السابقة وعرضها في الجدول كالآتي:

المتغير الثاني / المتغير الأول	1	2	.....	j	.....	C	المجموع السطري
1	O_{11}	O_{12}	.....	O_{1j}	.....	O_{1c}	$O_{1.}$
2	O_{21}	O_{22}	.....	O_{2j}	.....	O_{2c}	$O_{2.}$
. . .	. . .	. . .	.....	. . .	. . .	. . .	. . .
i	O_{i1}	O_{i2}	.....	O_{ij}	.....	O_{ic}	$O_{i.}$
. . .	. . .	. . .	.....	. . .	. . .	. . .	. . .
r	O_{r1}	O_{r2}	.....	O_{rj}	.....	O_{rc}	$O_{r.}$
المجموع العمودي	$O_{.1}$	$O_{.2}$	.....	$O_{.j}$	.....	$O_{.c}$	n

ونسميه بجدول الاقتران (التوافق) حيث يكون O_{ij} عدد عناصر العينة المتصفة بالصفة i من المتغير الأول والصفة j من المتغير الثاني حيث:

$i = 1, 2, \dots, r \quad ; j = 1, 2, \dots, c$ و $\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{c} O_{ij} = n$.

وبكون $O_{i.}$ مجموع عناصر السطر i: $i = 1, 2, \dots, r$

$O_{.j}$ مجموع عناصر العمود j: $j = 1, 2, \dots, c$

والفرضية المراد اختبارها: [المتغير الأول مستقل عن المتغير الثاني] : H_0

والفرضية البديلة : [المتغير الأول ليس مستقلاً عن المتغير الثاني] : H_1

عند مستوى المعنوية α.

وإحصائية الاختبار تحت صحة H_0 ستكون من الشكل:

$$x_0{}^2 = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{c} \frac{(O_{ij}-E_{ij})^2}{E_{ij}}$$

حيث E_{ij} هو التكرار المتوقع تحت صحة H_0 والمقابل للتكرار المشاهد من العينة O_{ij} حيث $i = 1, 2, \dots, r \;\; ; j = 1, 2, \dots, c$

حيث يتم حساب E_{ij} من العلاقة [وتحت صحة H_0]

$$E_{ij} = \frac{O_{i.} \times O_{.j}}{n}$$

أو

$$E_{ij} = \frac{(\text{مجموع العمود } j) \times (\text{مجموع السطر } i)}{n}$$

وسيكون لإحصائية الاختبار تقريباً توزيع كاي_مربع بدرجة من الحرية

$\gamma = (r-1)(c-1)$.

وقيمة إحصائية الاختبار النظرية تحسب من جدول كاي_مربع بـ γ ودرجة من الحرية وعند مستوى α من المعنوية:

$$\varkappa^2_{1-\alpha}(\gamma) = \varkappa^2_{1-\alpha}\big(\gamma = (r-1)(c-1)\big)$$

ثم نقارن ${\varkappa_0}^2$ مع $\varkappa_{1-\alpha}^2(\gamma)$ فإذا كان $\varkappa_0^2 > \varkappa_{1-\alpha}^2(\gamma)$ عندها نرفض H_0 ونقبل H_1 ، أي إن المتغيرين غير مستقلّين وإذا كان ${\varkappa_0}^2 \leq \varkappa_{1-\alpha}^2(\gamma)$ عندئذٍ نقبل H_0 ونرفض H_1 أي إن المتغيرين مستقلان .

مثال (5 - 17):

أراد فريق طبي أن يتعرف إذا كانت هناك علاقة بين نوع الدم وشدة الإصابة بمرض معين، لهذا قام الفريق الطبي بدراسة 1500 حالة وضعوها بالجدول الآتي:

شدة الزمن	نوع الدم				المجموع السطري
	A	B	AB	O	
بسيط	543	211	90	476	1320
متوسط	44	22	8	31	105
شديد	28	9	7	31	75
المجموع العمودي	615	242	105	538	$n = 1500$

والمطلوب: اختبر صحة الفرضية:

[إن شدة المرض مستقل عن نوع الدم لدى الشخص المريض]:H_0 عند مستوى المعنوية $\alpha = 0.01$.

الحل: من أجل الاختبار وحساب إحصائية الاختبار تحت صحة H_0، لنعين أولاً جدول التكرارات المتوقعة وذلك من خلال العلاقة:

$$E_{ij} = \frac{o_{i.} \times o_{.j}}{n} \quad ; \quad i = 1, 2, 3; \quad j = 1, 2, 3, 4$$

$$E_{11} = \frac{O_{1.} \times O_{.1}}{n} = \frac{615 \times 1320}{1500} = 541.2$$

$$E_{12} = \frac{O_{1.} \times O_{.2}}{n} = \frac{1320 \times 242}{1500} = 212.96$$

وهكذا ..... ثم نضع القيم الناتجة في جدول التكرارات المتوقعة:

شدة المرض	نوع الدم			
	A	B	AB	O
بسيط	541.2	212.96	92.4	473.44
متوسط	43.5	16.94	7.35	37.66
شديد	30.75	12.10	5.25	26.90

وبحساب القيمة التجريبية لإحصائية الاختبار تحت صحة H_0:

$$x_0{}^2 = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{c} \frac{\left(O_{ij} - E_{ij}\right)^2}{E_{ij}} =$$

$$\frac{(543-541.2)^2}{541.2} + \frac{(211-212.96)^2}{212.96} + \cdots + \frac{(31-26.90)^2}{5.25} = 5.10$$

وبملاحظة أن $r = 3$ و $c = 4$

فإن درجة الحرية $\gamma = (r-1)(c-1) = (3-1)(4-1)$

أي $\gamma = 6$ و $\alpha = 0.01$:

والقمة النظرية لإحصائية الاختبار هي $\varkappa_{1-\alpha}^2(\gamma) = \varkappa_{0.99}^2(6) = 16.8$

وبالمقارنة مع $\varkappa_0^2 = 5.10$ نجد أن $\varkappa_0^2 < \varkappa_{1-\alpha}^2(\gamma)$ ومنه نقبل H_0 ونرفض H_1. أي إنه لا علاقة بين نوع الدم وشدة الإصابة بالمرض.

مثال (5 - 18):

يمثل الجدول الآتي أوضاع 180 مدخناً، مصنفة حسب درجات إدمانهم من جهة وإصابتهم بالضغط الشرياني من جهة أخرى.(حيث الأعداد ما بين قوسين ضمن الخلايا تعبر عن التكرار المتوقع في كل خلية والعدد بدون أقواس يمثل التكرار المشاهد). والمطلوب: عند مستوى المعنوية $\alpha = 0.05$ اختبار الفرضية التالية [ليس هناك علاقة بين التدخين والإصابة بارتفاع الضغط الشرياني].

الحل:

يراد هنا اختبار H_0 : [استقلال التدخين عن الإصابة بارتفاع الضغط الشرياني] مقابل الفرضية H_1 : [هناك علاقة بين التدخين والإصابة بارتفاع الضغط الشرياني] .

والجدول المفروض هنا:

درجة التدخين / الإصابة بالمرض	مدخن بكثرة	مدخن وسط	غير مدخن	المجموع السطري
مصاب بالضغط الشرياني	$O_{11} = 30$ $(23.68) = E_{11}$	$O_{12} = 36$ $(29.97) = E_{12}$	$O_{13} = 21$ $(33.35) = E_{13}$	$O_{1.} = 87$
غير مصاب بالضغط الشرياني	$O_{21} = 19$ $(25.32) = E_{21}$	$O_{22} = 26$ $(32.03) = E_{22}$	$O_{23} = 48$ $(35.65) = E_{23}$	$O_{2.} = 93$
المجموع العمودي	$O_{.1} = 49$	$O_{.2} = 62$	$O_{13} = 69$	$n = 180$

حيث تم حساب التكرار المتوقع من العلاقة:

$$E_{ij} = \frac{O_{i.} \times O_{.j}}{n} \quad ; \quad i = 1, 2 \; ; \quad j = 1, 2, 3,$$

والقيمة التجريبية لإحصائية الاختبار تحت صحة H_0 ستكون:

$$x_0{}^2 = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c}\frac{\left(O_{ij}-E_{ij}\right)^2}{E_{ij}} = \frac{(30-23.68)^2}{23.68} + \cdots + \frac{(48-35.65)^2}{35.65} = 14.46$$

والقيمة النظرية لإحصائية تحسب من جدول كاي_مربع، عند مستوى المعنوية $\alpha = 0.05$ ودرجة الحرية

$$\gamma = (r-1)(c-1) = (2-1)(3-1) = 2$$

والقيمة النظرية لإحصائية الاختبار $\varkappa_{1-\alpha}^2(\gamma) = \varkappa_{0.95}^2(2) = 5.991$.

وبالمقارنة مع $\varkappa_0^2 = 14.46$ نجد أن $\varkappa_0^2 > \varkappa_{1-\alpha}^2(\gamma)$ ومنه نرفض H_0 ونقبل H_1 أي إن التدخين غير مستقل عن الإصابة بالضغط الشرياني أي إن لهما علاقة بعضهما ببعض.

مثال (5 - 19):

لدراسة العلاقة بين مورثة لون الشعر ومورثة لون العينين في إحدى المناطق، تم اختيار 400 شخص، وتم تصنيفهم حسب لون الشعر ولون العينين في الجدول الآتي: (حيث الرقم في الخلية بدون أقواس يمثل التكرار المشاهد والرقم بين قوسين يمثل التكرار المتوقع) .

والمطلوب: عند مستوى المعنوية $\alpha = 0.01$ يراد اختبار الفرضية التالية:

[لا توجد علاقة بين لون الشعر ولون العينين].

جدول الاقتران (لون الشعر × لون العينين)

لون العينين / لون الشعر	أسود	أخضر	أزرق	المجموع السطري
أسود	$O_{11} = 50$ $E_{11} = (34.5)$	$O_{12} = 54$ $E_{12} = (50.75)$	$O_{13} = 41$ $E_{13} = (50.75)$	$O_{1.} = 145$
بني	$O_{21} = 38$ $E_{21} = (39.6)$	$O_{22} = 46$ $E_{22} = (46.20)$	$O_{23} = 48$ $E_{23} = (46.20)$	$O_{2.} = 132$
أشقر	$O_{31} = 22$ $E_{31} = (24.9)$	$O_{32} = 30$ $E_{32} = (29.05)$	$O_{33} = 31$ $E_{33} = (29.05)$	$O_{3.} = 83$
أحمر	$O_{41} = 10$ $E_{41} = (12.0)$	$O_{42} = 10$ $E_{42} = (14.0)$	$O_{43} = 20$ $E_{43} = (14.0)$	$O_{4.} = 40$
المجموع العمودي	$O_{.1} = 120$	$O_{.2} = 140$	$O_{.3} = 140$	$n = 400$

الحل:

يراد اختبار: [مورثة لون العينين مستقلة عن مورثة لون الشعر]: H_0

مقابل الفرضية البديلة: [مورثة لون العينين غير مستقلة عن مورثة لون الشعر]: H_1 ، وتحت صحة H_0 نحسب إحصائية الاختبار $\varkappa_0^2$:

$$\varkappa_0^2 = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c}\frac{\left(O_{ij}-E_{ij}\right)^2}{E_{ij}} = \frac{(50-34.5)^2}{34.5} + \cdots + \frac{(20-14)^2}{14} = 6.75$$

ومن أجل $\alpha = 0.05$ ودرجة الحرية $\gamma = (4-1)(3-1) = 6$ ، ومن جدول كاي_مربع تحسب القيمة النظرية لإحصائية الاختبار

$$x_{1-\alpha}^2(\gamma) = \varkappa_{0.99}^2(6) = 16.812$$

وبالمقارنة مع $\varkappa_0^2 = 6.75$ نجد أن $\varkappa_0^2 < \varkappa_{1-\alpha}^2(\gamma)$ ومنه نقبل H_0 ونرفض H_1 ، أي هناك استقلال (لا علاقة) بين مورثة لون العينين ومورثة لون الشعر.

مثال (5 - 20):

تم توزيع مجموعة من الطلبة على ثلاثة مدرسين A, B, C لتدريس مقرر معين، ثم خضع الطلاب للامتحان نفسه فكانت النتائج كالآتي:

	A	B	C	المجموع
ناجح	$O_{11} = 50$	$O_{12} = 47$	$O_{13} = 56$	$O_{1.} = 153$
راسب	$O_{21} = 5$	$O_{22} = 14$	$O_{23} = 8$	$O_{2.} = 27$
المجموع	$O_{.1} = 55$	$O_{.2} = 61$	$O_{.3} = 64$	$n = 180$

اختبر عند مستوى الأهمية (المعنوية) $\alpha = 0.05$ استقلال نسب الراسبين عن الأساتذة الثلاث.

الحل: إن فرضية العدم: "استقلال نسب الراسبين عن الأساتذة الثلاثة" :

أي $H_0: P_1 = P_2 = P_3$

الفرضية البديلة : "النسب غير متساوية" : H_1

إن إحصائية الاختبار :

$$x^2 = \sum_{j=1}^{c}\sum_{i=1}^{r}\frac{(O_{ij}-E_{ij})^2}{E_{ij}} \sim x^2_{(\gamma=(r-1)(c-1))}$$

حيث يتم حساب E_{ij} كالآتي :

$$E_{ij} = \frac{O_{i.} \times O_{.j}}{n} \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, r \quad ; \quad j = 1, 2, \dots, c$$

مثلاً $$E_{11} = \frac{O_{1.} \times O_{.1}}{n} = \frac{153 \times 55}{180} = 46.75$$

وهكذا حيث يتم تشكيل الجدول الآتي:

	A	B	C	المجموع
ناجح	$O_{11} = 50$ $E_{11} = 46.75$	$O_{12} = 47$ $E_{12} = 51.85$	$O_{13} = 56$ $E_{13} = 54.40$	$f_{1.} = 153$
راسب	$O_{21} = 5$ $E_{21} = 8.25$	$O_{22} = 14$ $E_{22} = 9.15$	$O_{23} = 8$ $E_{23} = 9.60$	$O_{2.} = 27$
المجموع	$O_{.1} = 55$	$O_{.2} = 61$	$O_{.3} = 64$	$n = 180$

ومنه:

$$\varkappa_0^2 = \frac{(50-46.75)^2}{46.75} + \frac{(47-51.85)^2}{51.85} + \frac{(56-54.40)^2}{54.40} + \frac{(5-8.25)^2}{8.25} + \frac{(14-9.15)^2}{9.15} + \frac{(8-9.60)^2}{9.60} = 4.84$$

والقيمة النظرية لإحصائية الاختبار تحسب من جدول كاي_تربيع عند مستوى المعنوية $\alpha = 0.05$ ودرجة الحرية

$$\gamma = (r-1)(c-1) = (2-1)(3-1) = 2$$

و $\varkappa_{1-\alpha}^2(\gamma) = \varkappa_{0.95}^2(2) = 5.991$.

وبالمقارنة مع $\varkappa_0^2 = 4.84$ نجد أن $\varkappa_0^2 < \varkappa_{1-\alpha}^2(\gamma)$ ، فهذا يدل على قبول H_0 ورفض H_1 ، أي هناك تساوي نسب الراسبين أو هناك استقلال ما بين نسبة الراسبين والأساتذة الذين أشرفوا على التدريس.